III. *Logarithmotechnia Generalis.* *Authore* Jo. Craig.

ILluſtriſſimi noſtratis Jo. Nepairi incomparabile Logarithmorum inventum egregiis ſuis laboribus plurimùm promoverunt Viri eruditiſſimi, quorum Methodi Logarithmos conſtruendi præfixæ ſunt Logarithmorum Tabulis longé optimis à D. Henrico Sherwino publicatis. Adeo ut ad utiliſſimam hanc Arithmeticæ partem perficiendam, hoc tantùm inveniendum ſupereſſe videatur; ut ſcil. omnes Series Logarithmicas inveniendi Methodum habeamus generalem; talis autem eſt hæc quæ ſequitur, facilis quidem illa & genuina, utpote ex ipſâ Logarithmorum Naturâ deducta.

Per literam l numero cuilibet præfixam denotetur (ut vulgo ſolet) iſtius Numeri Logarithmus. Jam quoniam Numeri cujuſvis propoſiti Logarithmus duobus modis inveſtigari poteſt, ideo Logarithmotechniæ hujus duas partes conſtituemus: In priori Logarithmum immediaté ex ipſo numero deducimus; in poſteriori vero Numerorum aliquot antecedentium Logarithmi adhibentur, ut ex iis propoſiti Numeri Logarithmus inveniatur.

Pars Prior. Sit $a+1$ numerus quilibet propoſitus, & x ejus Logarithmus inveniendus. Jam ex hypotheſi $x = l.\overline{a+1}$, quæ æquatio vocetur Canon generalis. (1.) Fiat æquatio inter terminos ex a & y utcunq; compoſitos & cum aliis quibuſvis numeris quovis modo per Additionem, Subſtractionem, Multiplicationem, Diviſionem aut Radicum extractionem combinatos. (2.) Ope æquationis ſic ad libitum aſſumptæ exterminetur a ex Canone generali, & habebitur æquatio exprimens relationem inter

indeterminatos x, y. (3.) Hujus æquationis (per regulam Bernoullianam) inveniatur Differentialis. & hujus Integralis (per methodos notissimas) per Seriem Infinitam expressa dabit Logarithmi quæsiti x valorem cognitum.

Exemplum 1. Assumatur $a=y$, unde per Canonem generalem $x=l.\overline{1+y}$, cujus differentialis est $\dot{x}=\frac{\dot{y}}{1+y}$, & hujus integralis per Seriem infinitam expressa dat

$$x=y-\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{4}y^4+\tfrac{1}{5}y^5-\tfrac{1}{6}y^6+\tfrac{1}{7}y^7 \text{ \&c.}$$

Exemplum 2. Assumatur $y=\frac{a}{a+2}$, unde $a+1=\frac{1+y}{1-y}$, ideoq; per Canonem generalem $x=l.\frac{1+y}{1-y}$, cujus Differentialis est $\dot{x}=\frac{2\dot{y}}{1-yy}$; & hujus Integralis in Seriem resoluta dat

$$x=2\times y+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{5}y^5+\tfrac{1}{7}y^7+\tfrac{1}{9}y^9 \text{ \&c.}$$

Ubi numerus 2 Seriei præfixus multiplicari supponitur in singulos Seriei terminos. Nec plura addere exempla opus hic erit, cum ex his pateat Methodus inveniendi innumeras Series Logarithmicas, quæ, absq; ullo ad aliorum numerorum Logarithmos respectu, exhibent numeri propositi Logarithmum. Q. E. I.

Lemma 1. Sit z Logarithmus cujusvis fractionis $\frac{b}{a+1}$, x Logarithmus denominatoris $a+1$; erit $lb-z=x$:

Vel si sit z Logarithmus fractionis $\frac{a+1}{b}$, erit $lb+z=x$.

Lemma

Lemma 2. Sit e exponens cujusvis potestatis numeri b, erit $l.b^e = e \times l.b$; ideoque datis Logarithmo numeri b^e & exponente e, datur ipsius b Logarithmus: Et ex Natura Logarithmorum constat utrumq; Lemma.

Pars Posterior. Sit (ut prius) $a+1$ Numerus cujus Logarithmus x est inveniendus, sitq; b^e Numerus productus ex Multiplicatione Numerorum, quorum maximus est minor quam $a+1$; & z Logarithmus fractionis $\frac{b}{a+1}$, id est $z=l. \frac{b}{a+1}$, quæ æquatio vocetur Canon generalis. Tum (1.) pro b sumatur quantitas ex a & numeris quibusvis determinatis utcunq; composita, & hic valor numeri b sic ad libitum sumptus substituatur in fractione $\frac{b}{a+1}$, unde illa per a & numeros datos exprimetur. (2.) Fiat quælibet æquatio inter y & a cum numeris ad libitum sumendis; & ope hujus exterminetur a ex Canone generali, unde habetur æquatio exprimens relationem inter indeterminatos z, y. (3.) Hujus æquationis inveniatur (per Regulam Bernoullianam) Differentialis, hujusq; Integralis (juxta Methodos notissimas) per Seriem infinitam expressa dabit fractionis $\frac{b}{a+1}$ Logarithmum z; & ex invento z habebitur (per Lem. 1.) numeri propositi $a+1$ Logarithmus $x=l.b-z$. Nam ex hypothesi b^e producitur ex Multiplicatione Numerorum quorum maximus est minor quam $a+1$; & ex hypothesi dantur Logarithmi omnium numerorum proposito $a+1$ minorum, ergo & Logarithmus Numeri ex omnibus producti seu b^e, & proinde (per Lem. 2.) ipsius b Logarithmus datur.

Exemplum 1. Sumatur si placet $b=a$, unde $z=l. \frac{a}{a+1}$: Dein (per art. 2) fiat ad libitum $y=2a+1$, per

hanc exterminetur a, & erit $z = l.\frac{y-1}{y+1}$, cujus Differentialis est $\dot{z} = \frac{2\dot{y}}{yy-1}$; cujus Integralis per Seriem expressa dat $z = -2 \times \frac{1}{y} + \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{5y^5} + \frac{1}{7y^7}$ &c. Unde per Lemma 1.

$$x = lb + 2 \times \frac{1}{y} + \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{5y^5} + \frac{1}{7y^7} + \frac{1}{9y^9} \text{ \&c.}$$

Exemplum 2. Fiat $b = \sqrt{aa+2a}$, unde $z = l.\frac{\sqrt{aa+2a}}{a+1}$, sumatur etiam ad libitum $y = 2a + 2a$, unde $z = l.\frac{1}{y}\sqrt{yy-4}$, cujus Differentialis est $\dot{z} = 4\dot{y} \times \overline{y^3 - 4y}|^{-1}$, & hujus Integralis est $\dot{z} = -2 \times \frac{1}{y^2} + \frac{2^2}{2y^4} + \frac{2^4}{3y^6} + \frac{2^6}{4y^8}$ &c. Unde Lemma 1.

$$x = l.b + 2 \times \frac{1}{y^2} + \frac{2^2}{2y^4} + \frac{2^4}{3y^6} + \frac{2^6}{4y^8} + \frac{2^8}{5y^{10}} \text{ \&c.}$$

Exemplum 3. Fiat $b = \sqrt{aa+2a}$, ut in præcedenti, sed jam assumatur $y^2 = 2aa + 4aa + 1$; Si per has duas æquationes exterminentur b & a ex Canone generali, erit $z = l.\frac{\sqrt{yy-1}}{\sqrt{yy+1}}$, cujus Differentialis est $\dot{z} = 2yy\dot{y} \times \overline{y^4 - 1}|^{-1}$; & hujus Integralis per Seriem expressa est $z = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{3y^6} - \frac{1}{5y^{10}} - \frac{1}{7y^{14}}$ &c. Unde per Lem. 1.

$$x = l.\, b + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{3y^6} + \frac{1}{5y^{10}} + \frac{1}{7y^{14}} + \frac{1}{9y^{18}} \text{ \&c.}$$

Notan-

Notandum verò est quod numerus 2. Seriebus Exemp. 1 & 2. præfixus multiplicari supponitur in singulos Serierum terminos: Similesq; Series deduci possunt eodem modo ex $z = l.\frac{a+1}{b}$, atqui tum $x = l.\ b + z$, ut constat ex Lemmatis 1. parte secundâ. Ex his itaq; satis superque constat Logarithmotechniam jam expositam esse facillimam & maxime genuinam, nec-non adeo generalem ut duobus modis innumeræ Series inveniri possint Numeri cujusvis propositi Logarithmum exhibentes: Nam innumeras (ad libitum) assumere licet æquationes relationem inter y & a exprimentes, quarum unaquæq; novam exhibet Seriem Logarithmicam. Summa tamen adhibenda est cura, ut tales assumantur, quæ efficient ut Serierum termini quam celerrimé convergant, i. e. ut Logarithmus quam minimo Calculi labore inveniatur: Ad hoc præstandum perquam apta est Series in Exemplo postremo exhibita, & quæ eadem est cum illâ quam primus exhibuit Celeberrimus D. Ed. Hallejus in eleganti suâ Logarithmos construendi Methodo.

Obiter Lectorem hic monitum volo, quod Curva, quæ ex nostrâ Problematis de Longitudine linearum Curvarum Analysi in Actis Phil. R. S. Anni 1708. editâ eadem sit cum propositâ. Ego quidem de rectè institutâ Analysi tantum sollicitus hanc Curvæ propositæ & inventæ coincidentiam minime observabam, priusquam de eâ me certiorem fecerit Clariss: D. Jo. Bernoulli in literis suis ad D. Guil. Burnetum, R. S. S. missis; in quibus etiam Celeberrimum virum meis contra *Motum* suum *Reptorium* objectionibus plenè satisfecisse ex puro (quam colo) Veritatis amore libenter agnosco.

IV. *Experi-*